〈特集「現代における知の射程」1〉

「一」ということ

――解析学の基礎をめぐって――

田山令史

私が今、ここで手を左から右に動かすと、線が描ける。この線について考えてみたい。手を動かすことで描かれた線は一本である。そして、切れ目なくつながっている。言い換えれば連続している。さて、この線が連続したつながりであることは、どう理解されているのか。そして又、一本であることは、どう了解されているのか。こんなことは言うまでもないことで、線がつながっていることや、一本であることを改めて問うなど、意味なくも思われる。一本の線と同じく自明のことがある。私は一人であること、そしてこの私が昔の私とずっと同じ私であること、事改めて言うとこれも無意味に響く。(1) しかし、ここに問題を見て、時に私達の日常にも関係する或る洞察を得た、そのような思想がある。すなわち、線の一本であること、連続であることについて、解析学が、一方、私が一人でいて、そしていつも同じ自分であるという了解からは、哲学、例えば、ヒューム、カントが、豊かな考察を引き出している。

私達にとって、$\sqrt{2}$は中学以来、数である。しかし、人が$\sqrt{2}$は数でないとしていた時期は長い。一九世紀に至ってようやく、これを数とする議論が現れる。数と見ないことには理由があり、この理由は、連続性の問題、無限への問い、といった名でもって、数学、哲学の根となって広がっている。

ギリシャの数学、そして現代の標準的な解析学が、連続性というものをどう了解しているかの大筋を描いてみる。そして、ここに進歩を見るよりは、共通するところを見付けたい。解析学の発達によって連続性は精緻な表現を得ることになる。それは、私達が日常、線が連なっていると言うときの連続性の了解を根底から変えるものとも言える。が、日常的了解は実数論に取って代えら

れたわけではない。この経緯をたどる。これを枕にして、哲学に入りたい。言い換えれば、線の一本であること、そしてその連続性ということが、私が一人であること、この私が同じ私であり続けていることと関わる、この関わりを見て取りたい。数学の基礎的な問題と自己との関係はいかにも奇妙である。しかしこの考察には先駆がある。カントは『純粋理性批判』の中で、一本の線を引くという行為に関連させて、自己の統一を論じていく。ここを線の連続性の考察をもとにして自分なりに解釈する。ユークリッドからニュートンに至る数学の姿、これをカントは精確に捉え、ことにニュートンの微積分の基礎を哲学に取り込むことに努めていると思われる。一体どうやって、そして、なぜそんなことが必要なのか。これを見ることで、今日、哲学と科学の接点をどう見出すかということについて、一つの考えを示したい。

1　ギリシャ

一本の線がすきまなく連続しているというとき、私達は何を了解しているのか。線の上に二点a、bがある。このa、bの間に点cを考えることができる。今度は、このa、cの間に点dを入れる。このようなことが際限なく続く。つまり、線を構成しているものが何であれ、この構成要素の間に、又、いくらでも別の要素が見出される。こういうことが、私達の線の連続性ということの了解ではないだろうか。ならば、今の解析学による連続性の理解とは異なる。

有理数と呼ばれる数の無限集合がある。分数の形で表すことのできる数すべてである。この有理数でもって直線をおおっていこう。例えば、長さ1の線を半分に、そしてその2分の1をさらに半分の4分の1、という具合に無数の点のしるしを線に付けていく。こうすれば、この直線は有理数でもって完全におおえるようにも思える。しかしおおえない。というのは、有理数以外に無理数というものがある。無理数には、例えばルートの形で表される数、あるいはπとか自然対数の底であるeといった超越数、代数方程式の解にならない数など無数の種類があるが、ここでは例としてルートで表される数を取り上げる。例えば、$\sqrt{2}$という無理数は、$\frac{3}{2}$と$\frac{7}{5}$の間に入れることができる。無理数も無限の集合を作るから、有理数でおおわれた直線は、すきまだらけであることになる。言い換えれば、線に連続性を与えるとは、有理数の列に無理数を取り込むことに他ならない。

無理数の存在と連続性の問題は、関連した一連なりの事柄である。したがって、無理数の存在は線を始めとして連続するもの一般についての思想を磨く。これを数学の歴史に見てみる。

今からおよそ二五〇〇年程前に、有理数だけを手にして図形の、そしてそれをもとに、自然全般を数の言葉で読もうとしていたピタゴラス学派に、無理数（無理量とも呼ばれる）の発見は衝撃を与えた。例えば、一辺が一の長さの正方形の対角線の長さは$\sqrt{2}$で

あることが分かる。ここで、数の性質を考える数論と幾何学との、予定されていた調和がくずれることになった。紀元前三〇〇年程に現れたユークリッドの『原論』[2]は、このピタゴラスの崩壊を念頭に作り上げられたものである。

ピタゴラス学派には実は今で言う分数としての有理数という概念もない。これは時代の下るユークリッドでも同様である。ユークリッド『原論』の第七巻定義一に数の定義がある。まず「単位」という考えがこう導入される。「単位とはそれによって存在するもののおのおのが一と呼ばれるものである」。ついで数について定義の二「数とは単位から成る多である」。ここでは分数は数でなく、ここでいう数、つまり自然数の比として扱われる。ユークリッドではだから、分数同士の足し算、掛け算などがどこにもない。ルートで表される無理数は自然数の比にもならない存在である。言い換えれば、ユークリッドの言う単位、その集まりでもって表現できる存在ではない。『原論』はその幾何学的考察で有名であるが、ここに無理数、そして連続性について強い意識が見られる。つまり、ユークリッドの手元にある数だけで図形を扱おうとすると、すきまだらけの図形しか現れてこない。だから、図形を数に翻訳することなく、いわばまるごと扱う必要がある。[3]

例えば『原論』の第十二巻命題二、「円は互いに直径上の正方形に比例する。」今の言い方に直せば、円の面積はその直径を一辺とする正方形の面積に比例する。この証明では、背理法が用いられ、円に内接する正多角形の辺の数をつぎつぎに増やしていくことで、円の面積を多角形でどこまでも近似する方法が取られている。ここで面積は数に置き換えられず、「円Oの面積」といった表現のまま証明に現れる。同時に、この証明には、多角形と円の面積の差を任意に小さくすることができるという考えが効いている。この、二つの量が一致するとは言わず、いくらでも近づいていくという考えに注目したい。量を数字で表すとしても有理数しかないギリシャ数学だが、しかしこの表現は無理数というすきまを持つ数体系についてでなく、連続量についてのものであり、後に解析学の極限値への収束という思想に整えられる。[4]無理数へのユークリッドの配慮が、明確な形を得たのは、二〇〇〇年以上過ぎて一九世紀のことだった。

2　ニュートン

微分の操作では、曲線の任意の一点での曲がり具合が求められる。このためには曲線は切れ切れでなくて連続であることが必要条件になる。微積分の開発者の一人、ニュートンは自分の方法に不満だった。[5]曲線をいくらでも細かく分割していくというとき、その極限にどう意味を与えるのか。その極限で無限に小さい量と、零と、どう区別するのか。極限値がどう集まって一定の量、例えば線の長さが生じるというのか。曖昧さがつきまとう。この困難に対して、様々の方法が考えられる。無限小であり、無視できる

或る量を前提して、これの集まりとして一定の量を考える。これを避けて、点や線そのものでなく、その動きが線や面の一定の長さ、面積を生じると考える。そして極限値について、『自然哲学の数学的諸原理（プリンキピア）』の第一篇第一章補助定理の1、「任意の有限の時間内で量、あるいは量の比が連続的に、等しくなるところへ向かい、与えられた時間内で、どんな任意の差よりもお互いに近くなるとき、それらは極限において等しくなる。」[6] ここで、「どんな任意の差よりも」小さくなる、という言い方は、ユークリッド『原論』で見かけたものだが、ニュートンでは「限られた時間内に」という条件が加わる。点の運動として線の連続性を捉えること、これは数体系に欠けている連続性を、時間に求めようとすることである。私達は、二つの三角形が合同だというとき、いつ合同になったのか、などと問いはしない。一定の時間内で到達される極限値を考えること、これは、時間を度外視するはずの数学を運動学と混ぜることであり、批判を招く。いずれも極限値についての納得いく議論ではない。基本的な問題は解決されぬまま、計算手法としての微積分は以後、科学に不可欠なものとして発展していく。このニュートンを悩ませた極限値の問題は、ギリシャ以来の無理数、そして連続性の問題の別の側面である。

デーデキントが一八七二年、「連続性と無理数」という論文を発表し、無理数は有理数の切断という形で導入されて、ここに一本の線の連続性はやっと一つの表現を得ることになる。デーデキントの議論を「極限値」を使って言いなおしながら、説明する。[7]

一本の直線、そして高校の解析を念頭にして頂きたい。全有理数をA、Bのふた組に分けて、Aに属する各々の数をBに属する各々の数より小さくする。これを切断（Schnitt）と言う。この切断があるとき、そこにすきまがあり得る。有理数とは、すべての数の種類をいうものではないからである。このすきまができるときは、Aが最大数を欠き、Bも最小数を欠いている状態だろう。このようなことはAとBが、例えば$\sqrt{2}$を境にして分かれている場合に生じるはずである。言い換えると、有理数の数列はどの有理数にも触れる事なく、それをA、Bの組に分けることができる。ここで、Aに属する有理数$\sqrt{2}$を近似する、つまり$\sqrt{2}$にいくらでも近づいていく数列を作ることができる。しかし、Aという有理数列は$\sqrt{2}$を極限値として持つことはできない。Bについても同じことが言える。このように、有理数列をふた組に切断し、欠けた極限値の場所、すきまに、ただ一つの実数を入れ込むのである。これが実数の、有理数の切断という考えによる導入である。ここで、一つの実数が有理数全体により定義されることによって、実数は有理数と並ぶ数の一種でなく、一段高い概念になると言える。さて今度、実数はというと、これはすべての種類の数をいうから、すきがない。特定の実数自身にさわらずに、組み分けを考えることができない。これが実数が、一本の直線がすきまがないということ、つまり連続性の、切断という考えによる表現である。ここ

で、実数の連続性と区別して、有理数がぎっしりつまっていることを有理数の稠密性と言う。さて、ここであらためて考えたいのは、この稠密性という私達の日常的な線のつながりの了解、これと一九世紀に新たに現れた連続性の考え方との関係である。

デーデキントの考えで次のことに注目したい。まず、この連続性は、有理数のすきまに無理数を入れ込むことで得られている。有理数の稠密性に基づく議論により連続性が導入されていると言える。ギリシャ時代からこの方、様々な種類の数が見出されてきた。それらの数を、ユークリッド言うところの数、つまり単位の集まりとしての数、そしてその比としての分数、これらが作っている列にすきまを想定して置いていくわけである。実数列を表すものとしての直線のイメージを、有理数の列としての直線のイメージとは異なって想像しようとしてもできない。ちょうど、水と重水を違ったふうに想像できないように。デーデキントの切断は、無理数の存在という事実に対応し、この事実を埋め合わせる形で有理数列をもとに導入されたのである。[8] さて、以上の準備をもとにして、カントへと入っていきたい。

3　一本の線

手を動かして、それが一本の線を描くことを言った。この線が連続する数という概念と関わってどれほど問題となったかを見た。もう少しこの連続した線ということを考えてみる。連続した線は、一本の線であり、逆に一本の線はすなわち連続した線である。連続してなければ切れて二本になるから。又、手の連続した動きは、一つの動きと捉えられるとき、連続である。「連続性」と「一」は、このような関係にある。さて、私の手を動かすという運動、これが一固まりであるという知覚からして、引かれた線は連続した一本とされるだろうか。例えば、ベルグソンはそう考えた。

ベルグソンは運動を、そして時間を、それそのものとして、純粋な持続として捉えるために、自分の手の運動を語る。[9] そしてここで、運動は単純な一固まり、「堅固な分かたれぬ全体」であるという知覚から、切れ目のない持続としての運動、持続としての時間というものを確かめると言う。この「堅固な分かたれぬ」、つまり、一つの連続した運動という知覚、この知覚に直接性を見て、持続に分節を入れ込む空間化を許さない時間の存在の証とするのである。つまり、「感官はそのままに放任されるとき」運動を運動として知覚するという。しかし、どのような「放任」なのか。腕の痛み、森の緑といった知覚と同じ直接性を言おうとしているのか。「あらゆる運動は、一つの静止から他の静止への通過である限りにおいて、絶対に分割不可能である」。一つの静止から他の静止へと至れば、この運動は連続であるとともに、一つとして捉えられるはずである。しかし、私は痛みを感じたり、緑を見るように、「一」を感じたり見たりはしない。一方、例えば、私が鉛筆で線を引くという運動の知覚は、断続的に持続しても一

つの連続として、そして引かれた線は一本として、捉えられ得る。今、手を動かす。切れ目なしの運動が見える。しかし、離れ離れの電球の点滅にも、一つの光点の切れ目のない動きを見る。だから、手の動きに連続を見るとき、手はずっとは見えてなくともよい。手そのものの運動や、それが描いていく線という対象の知覚自体には、この運動や線を、連続した一として分節するものはない。

ここに手があり、横に本がある。あわせて二つである、こう言うとき、「一」と「一」が合わされている。手も本も「一」と見るには、手や本から、それぞれが手であり、本である特徴を捨てていけばよいのか。しかし、捨てていけば、もともとある特徴が減るだけである。ここに「一」がどうして現れてくるというのか。私が線を引く、私が線を引いているかのように線を目で追う、その行為が連続したまとまりとして了解されているとき、線は一本として、連続する一として現れているのではないだろうか。しかしこれは、私の行為の持続する知覚を、線に投影して見るというのではない。

私は今、自分の中学時代を思い出す。ここに思い出されている中学時代は、すでに「私の」経験として思い出されている。過去と今、この時間の連続性は、持続の知覚によるのではない。中学の私と今の間に知覚される持続などない。ここに持続がないならば、今、線を引いている私の、引き始めと引き終わりの連続性も、知覚された持続、あるいは、そのような知覚を成り立たせる記憶にあるのではない、こう言えるのではないか。私の連続性は、記憶をたぐって、記憶の内に対象として知られるものではない。そうではなくて、今の私の、統一ある行為の結果が、一として見えることそのものに、つまり、私が引く線の一本であること、すなわち線の連続であることに、私は自分の、そして時間の連続性を見る、こう言えないだろうか。

4 カント

カントは$\sqrt{2}$といった無理数を数とは認めない。或る手紙の手稿[10]、「もしも、我々が空間の概念を持たないとすると、$\sqrt{2}$という量も、我々にとって意味（Bedeutung）を持たないだろう。持つというなら、分割できない単位（Einheit）の集まり（Menge）でどんな数でも表象できることになってしまう。しかし、一本の線をfluxionを通して作り出されるものと表象する、つまり線が時間の内で作り出されると表象してみよう。我々は時間の内では、何も単純なものを表象しないのだから、ここでは、与えられた単位の10分の1、100分の1、etc.,etc.という分割をずっと続けていくことを考えることができる。」（傍点は筆者）

ここでのfluxionという語は、ニュートンの言葉で、変化率を言う。先に見た方法で、点の動きとして線の長さを考えていくときに使われる語である。一本の線が、ニュートンの微積分を念頭にしながら語られる。カントは、単位と無理数、連続性、これら

ギリシャからの問題を、ニュートンを通して引き継ぐ。引き継ぎの過程で、「行為」、「意識の統一」を考察に引き込み、数学の問いを自己の連続的同一性の問いとして、読み変えていく。

「空間における何でも、例えば、一本の線、を知るには、私がその線を引いてみなければならない。このことで、与えられた多様なものに、ある決まった結合を綜合的にもたらさねばならない。それだから、この行為の統一がつまりは（線という概念での）意識の統一であり、このことによって初めて一つの対象（一定の空間）が認識される。意識の綜合的統一はだから、あらゆる認識に客観が与えられる条件である。」（『純粋理性批判』B138）

私が線を引くという行為、この、時間的に連続した統一ある行為が、意識の統一であり、これが「一つの」対象を与える。こう言う一息の文章に、線を、それを引く動きとして考えていく微積分の思想が、そして、単位、連続性の問いが新たな表現を得る。時間を数学に導入することには明確な理由付けのないニュートンを引き継ぎ、ここからカントの批判の領域になる。

ユークリッド、「単位とは存在するものの各々がそれによって一と呼ばれるところのものである」。カントがここで語っている、行為の統一、すなわち、意識の統一は、「単位」が姿を変えたものである。有理数は単位の集まりでもって表現され、一方、無理数も含んだ実数は一本の線として表象される。カントによって、これらはともに自己の行為的統一のもとに意味を与えられるのである。

稠密性という生活の中の直観は、一本の線という対象の連続性を、この対象はいくらでも細かくできると言い換えることである。線の一本であることと、連続していることは同じだから、稠密性とは、線の一本であることの別な表現と言える。線の一本であることが、自己の統一に関係付けられるなら、この稠密性の直観も自己に由来することが示せるだろうか。数学的事実と自己との関連は、それを語ること自身、意味ないものと思われる。三角形の内角の和が一八〇度であることと、自己の関係など、探ることは意味をなさない。しかし、これら数学的事実を語る土台となる「一」、「連続性」、「稠密性」、「空間」、「無限」といった基礎語は、数学の領域を超えた考察の助けによって、その意味を明らかにしていくのではないか。一本の線をめぐるカントの思索は、その試みと思われる。

無理数は分数の形で表現できない。実数の列には有理数の列と異なり番号付けができない（可付番ではない）。このように、実数の連続性と有理数の稠密性との違いは、単なる密度の違いをこえて、数に対する考え方の基本的な変化を必要とする。しかし、デーデキントのもとで見たように、稠密性の直観は、無理数の存在という事実を表現する基礎として欠かせない。そして、デーデキントによる連続性の分析は、有理数のこの稠密性がそのままでいて、無理数を取り込むさまを明らかにしている。数学の基礎語

を支える直観には、技術的発展にもかかわらず変わらないものがあるとも言えるのではないか。「空間」の意味は非ユークリッドの登場によって変わったのか。しかし、ユークリッド空間は、非ユークリッド空間によって意味を失うことはない。生活の営まれるこの空間を、時にユークリッド的に、時に非ユークリッド的に描きだす手段が出現したのである。[11] この不変性は、これら基礎語が、生活の基礎語でもあることを示してはいないだろうか。カントの試みは、その意味で、人の変わらぬ生活を描きだすものであり、様々な解釈を飲み込むその古典的な姿は、私達の生活の姿そのものではないだろうか。

比較思想は、自然科学と人文科学という、今は別れてしまった学問を互いに照らし合わせ、批判する試みでもあり得る。カントは同時代の科学に鋭敏に反応するが、カントが科学に求めるものの一つは、自己と対象の必然的な関連の手堅い証ではないだろうか。科学の基礎にある数学に、自己との関連が見られている。言い換えれば、観念論の基礎は科学にも探られていると思われる。今日、科学に、哲学の問いを見出すことは困難である。しかし困難は、カントの時代でも同じだろう。

(1) Frege, G., *Die Grundlagen der Arithmetik*, Hamburg : Felix Meiner, 1986 (原典は1884, Breslau).
このⅢ章§29で (pp. 44−45)「一」を述語と見ることへの批判がある。「一」について、最も興味深い考察がこの著作のこの章に見られると思う。特に、「一」というものは、対象からその特質を抽象することによって得られるのではないという議論、これは大切と思われる。
Husserl, E., *Philosophie der Arithmetik*, Hamburg : Felix Meiner, 1992 (原典は1891, Halle).
このⅦ章にFregeの思想への反論がある。これは誤解に基づいており、「一」、「単位」をめぐる考察の困難をよく示している。
Dummett, M., *Frege Philosophy of Mathematics*, London : Duckworth, 1991.
フッサールの誤解の性質について、八章と一二章に明快な解説がある。

(2) ユークリッドについては、以下の翻訳書による。
中村幸四郎他訳『ユークリッド原論』(ハイベルグ版) 共立出版、一九七一年。

(3) 無理数については『原論』第十巻の付録に、すべての正方形の対角線は辺の長さと通約不可能であること、今で言う無理数がここで登場することの、幾何学的ではない、数論的証明が示されている。

(4) 『原論』の第十巻第一定理、これは、二つの等しくない量の大きい方をずっと半分以下にし続けていくと、いずれは、もとの小さい方の量よりもさらに小さくすることができることをいう。この定理は、第五巻定義4「何倍かされて、互いに他より大きくなりうる2量は互いに比を持つといわれる。」からでてくる。この定義は、今の言い方では実数の範囲で「任意の正の数aに対して、数列 {na} は上に有界ではない。」と表現され、アルキメデスの公理と呼ばれるものである。公理とは呼ばれるがこれは、実数の連続性の公理、「上に有界な実数の集合は必ずその上限が存在する。」から導くこと

ができる。したがって、『原論』のこれらの表現では、連続量について語られている以上、極限値の存在、収束といった、実数論を背景とする解析学の言葉に翻訳できると考えられる。

(5) Newton,I.,*The Mathematical Papers of Isaac Newton*,ed.D.T.Whiteside,Cambridge.
このニュートンの数学論文集のvol.1−4に、三種の微積分の試みが見られる。
Klein, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, vol.1,Oxford,1972.
ニュートンの微積分につき、この一七章に詳しい解説がある。又、ここに、極限、無限の扱いについて、ギリシャ数学との厳密性の比較があり、興味深い。

(6) Newton,I., *Newton's Principia*, trans.F.Cajori, California, 1934, Book One section 1.
ニュートン、河辺六男訳『自然哲学の数学的諸原理』(「世界の名著」26) 中央公論社、第一篇第一章。

(7) R・デーデキント、河野伊三郎訳『数について』第一篇「連続性と無理数」岩波書店、一九六一年。

(8) デーデキント自身は、こう言う。我々は連続性を直線の中に持ち込んで考えるのである。もし現実の空間が不連続であったとしても、思考において、その隙間を充たすことによって連続なものを作り上げることは何らさしつかえないではないか。(同書、§3 p. 20) 数を、精神の創作として、その自由さを強調した言葉と思われる(同書、第二篇「数とは何か、何であるべきか」§6 の73を見よ)。しかし、無理数は自由に作り出されたのではなく、事実として発見されたのである。デーデキントの切断は、この現実に応じる方策ではないのか。

Stein,H.,"Eudoxus and Dedekind", *Synthese* 84 1990:pp.163−211.
ユークリッドとデーデキントの数論の詳細な比較であり、両者の手法の類似点が強調されるとともに、ユークリッドは実数の存在を数論内部では主張しないことが明快に説かれている。

(9) H・ベルグソン、田島節夫訳『物質と記憶』(「ベルグソン全集」2) 白水社、一九六五年、二一〇−二一一頁。
中島義道「持続と時間の間」『現代思想』(ベルグソン特集号) 一九九四年九月。
空間化不可能な純粋持続としての時間は、時間とは言えない、との明確な議論である。客観的計量を可能とするカント的時間が浮き彫りにされてくる。

(10) August Rehberg へ宛てる手紙の手稿 (Reflexion13)。

(11) 拙論「空間と幾何学」『自然哲学とその射程』(カント研究会編) 所収、晃洋書房、一九九三年。
非ユークリッドとユークリッド幾何学、そしてカント空間の関係を詳しく論じた。
Friedman,M.*Kant and the Exact Sciences*,Harvard,1992:pp.55−135.
カントと自然科学、特に数学の基礎との関わりについては、最も詳細で明快な探求と思われる。特にその文献渉猟はカント研究、科学史として有用である。Friedmanは特に引用したカントの、線を引く行為の強調に注目して、カントはここで慣性運動について論じていると考える。全般的に、Friedmanは徹底して自然科学の観点からカントを解釈しており、カントの言う自己意識は全く言及されない。

(たやま・れいし、哲学、仏教大学助教授)